

# III. Grundlagen der Lebensversicherungsmathematik

## III.3. Grundlagen der Theorie der Personengesamtheiten

---

Universität Basel  
Herbstsemester 2015

Dr. Ruprecht Witzel  
[ruprecht.witzel@aktuariat-witzel.ch](mailto:ruprecht.witzel@aktuariat-witzel.ch)  
[www.aktuariat-witzel.ch](http://www.aktuariat-witzel.ch)

## III.3. Grundlagen der Theorie der Personengesamtheiten

---

Inhalt

**1. Einleitung**

2. Ausscheideordnungen

3. Erläuterungen zu Sterbetafeln

## III.3. Grundlagen der Theorie der Personengesamtheiten

### III.3.1. Einleitung

---

- Unter einer **Personengesamtheit** versteht man eine eindeutig definierte Menge von Personen
- Von jeder Person ist also bekannt, ob sie der betreffenden Personengesamtheit angehört oder nicht
- Beispiele:
  - AHV: Bevölkerung der Schweiz mit Grenzgängern, die in der Schweiz arbeiten, und ohne Grenzgänger, die im Ausland arbeiten
  - UVG: alle Arbeitnehmer in der Schweiz, die genügend viele Stunden pro Woche arbeiten
  - Pensionskasse: alle Mitglieder der PK
  - Lebens-VU: alle Versicherten mit dem gleichen Tarif

## III.3. Grundlagen der Theorie der Personengesamtheiten

### III.3.1. Einleitung

---

- Bei einer **offenen Personengesamtheit** sind Veränderungen möglich durch **Eintritte und Austritte**
  - Manche bezeichnen das als **Bestand**
  - Beispiele:
    - Bevölkerung eines Landes:
      - Geburten und Einwanderung
      - Todesfälle und Auswanderung
    - Mitglieder einer Pensionskasse:
      - Neueintritte
      - Todesfälle und Austritte

## III.3. Grundlagen der Theorie der Personengesamtheiten

### III.3.1. Einleitung

---

- Bei einer **geschlossenen Personengesamtheit** sind Veränderungen möglich **nur durch Austritte**
  - Manche bezeichnen das als **Ordnung**
  - Beispiele:
    - Mitglieder einer Pensionskasse, wenn nur Todesfälle und Austritte betrachtet werden
- Bei **Lebens-VU und Pensionskassen** werden **grundsätzlich geschlossene Personengesamtheiten** betrachtet mit der Ausnahmemöglichkeit für öffentlich rechtliche Pensionskassen mit Staatsgarantie, die als offene Pensionskasse bilanzieren dürfen

## III.3. Grundlagen der Theorie der Personengesamtheiten

### III.3.1. Einleitung

- Im Folgenden bestehen die **Personengesamtheiten** aus einer bestimmten **Anzahl gleichaltriger Männer oder Frauen**
- Üblicherweise wird das **Alter der Männer mit  $x$**  und das **Alter der Frauen mit  $y$**  bezeichnet
- Im Folgenden können  **$x$  und  $y$  nur ganzzahlige Werte** annehmen (**diskontinuierliche Methode**)
- Eine **typisch Fragestellung** lautet:
  - **Wie verringert sich eine geschlossene Personengesamtheit von gleichaltrigen Männern durch Tod?**
  - Es wird angenommen, dass diese Verringerung durch ein **deterministisches Modell** beschrieben werden kann
  - Zur Vereinfachung der Darstellung wird angenommen, dass die **Todesfälle Ende des Jahres** stattfinden

## III.3. Grundlagen der Theorie der Personengesamtheiten

### III.3.1. Einleitung

- Diese mathematischen Gesetzmässigkeiten werden mit Hilfe statistischer Verfahren (**statistische Inferenz**) aus Daten des Versichertenbestandes abgeleitet, also aus **Daten der Vergangenheit**
  - Da hierbei Fehler auftreten können entsteht ein **Diagnoserisiko**
- Zusätzlich sind Modifikation erforderlich, um **zukünftige Veränderungen** zu berücksichtigen
  - Gesucht werden ja mathematische Gesetzmässigkeiten, die in Zukunft gelten
  - Hierdurch entsteht ein **Prognoserisiko**
- Da es sich um statistische Aussagen handelt, entsteht drittens ein **Zufallsrisiko**

## III.3. Grundlagen der Theorie der Personengesamtheiten

### III.3.1. Einleitung

---

- Z.B. werden für das Risiko Tod diese mathematischen Gesetzmässigkeiten als Wahrscheinlichkeit für einen Mann mit Alter  $x$  zu sterben in Sterbetafeln wiedergegeben
- Als Schutzmassnahme gegen diese drei Risiken
  - **Diagnoserisiko**
  - **Prognoserisiko**
  - **Zufallsrisiko**werden in die für den Tarif relevanten Wahrscheinlichkeiten **Margen** (Zuschläge) in Abhängigkeit des jeweiligen Risikos eingebaut
- Somit sind diese **Margen Bestandteil z.B. der Tarifprämien und der tarifarischen Rückstellungen**



## III.3. Grundlagen der Theorie der Personengesamtheiten

---

### Inhalt

1. Einleitung

**2. Ausscheideordnungen**

3. Erläuterungen zu Sterbetafeln

## III.3. Grundlagen der Theorie der Personengesamtheiten

### III.3.2. Ausscheideordnungen

---

- Unter einer **Ausscheideordnung (kurz auch Ordnung)** versteht man Folgendes:
  - Ausgangspunkt ist eine **Personengesamtheit deren Elemente (also Personen) eine oder mehrere bestimmte Eigenschaften (Attribute) besitzen**
  - Diese **Personen können** im Laufe der Zeit diese **Attribute verlieren, aber nicht wiedererlangen**
  - Eine so genannte Reaktivierung eines einmal verlorenen Attributs wird annahmegemäss ausgeschlossen
  - Die **Ausscheideordnung** gibt somit an, **wie viele Personen nach einer gewissen Zeit das betreffende Attribut noch haben**

## III.3. Grundlagen der Theorie der Personengesamtheiten

### III.3.2. Ausscheideordnungen

- Eine **Absterbeordnung** ist ein Beispiel mit einem Attribut:
  - Man betrachtet hierbei eine Personengesamtheit mit dem einen Attribut "leben"
  - Bei Tod verliert man dieses Attribut und scheidet aus
- Formalisiert lässt sich das wie folgt darstellen:
  - Mit  $I_x$  wird die Anzahl Männer mit Alter  $x$  bezeichnet, die Anfang des Jahres leben
  - Die **Zahlenfolge**  $I_\alpha, I_{\alpha+1}, \dots, I_x, \dots, I_\omega$  gibt dann eine **Absterbeordnung** wieder
  - Sie beginnt mit Alter  $\alpha$  (z.B. gleich 15) und endet mit Alter  $\omega$  (z.B. gleich 120)
  - Meistens gelten folgende Normierungen:
$$I_\alpha = 100'000 \text{ und } I_{\omega+1} = 0$$

## III.3. Grundlagen der Theorie der Personengesamtheiten

### III.3.2. Ausscheideordnungen

---

- Für die Anzahl der Toten im  $n$ -ten Jahr, d.h. mit Alter  $\alpha + n - 1$ , ergibt sich dann

$$d_{\alpha+n-1} = l_{\alpha+n-1} - l_{\alpha+n}$$

- Wegen  $d_{\omega} = l_{\omega} - l_{\omega+1} = l_{\omega}$  gilt

$$l_{\alpha} = d_{\alpha} + d_{\alpha+1} + \dots + d_{\omega}$$

## III.3. Grundlagen der Theorie der Personengesamtheiten

### III.3.2. Ausscheideordnungen

---

- Für den **Anteil der Männer mit Alter  $x$ , die nach  $n$  Jahren noch leben**, gilt:

$$l_{x+n} / l_x$$

- Für den **Anteil der Männer mit Alter  $x$ , die in den nächsten  $n$  Jahren sterben**, gilt:

$$\begin{aligned} (l_x - l_{x+n}) / l_x &= (d_x + d_{x+1} + \dots + d_{x+n-1}) / l_x \\ &= 1 - (l_{x+n} / l_x) \end{aligned}$$

## III.3. Grundlagen der Theorie der Personengesamtheiten

### III.3.2. Ausscheideordnungen

---

- Diese Anteile lassen sich auch im Sinne der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie von Laplace interpretieren:
  - Anzahl "günstiger" Fälle dividiert durch Anzahl "möglicher" Fälle
- Für die **Wahrscheinlichkeit  $p_x$  eines  $x$ -jährigen Mannes das Alter  $x+1$  zu erleben** ergibt sich dann:

$$l_{x+1} / l_x = p_x$$

- Für die **Wahrscheinlichkeit  $q_x$  eines  $x$ -jährigen Mannes zwischen den Altern  $x$  und  $x+1$  zu sterben** ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} d_x / l_x &= (l_x - l_{x+1}) / l_x \\ &= 1 - p_x = q_x \end{aligned}$$

## III.3. Grundlagen der Theorie der Personengesamtheiten

### III.3.2. Ausscheideordnungen

---

- Für die **Wahrscheinlichkeit eines x-jährigen Mannes noch n Jahre zu leben** gilt:

$$\begin{aligned} {}_n p_x &= l_{x+n} / l_x \\ &= (l_{x+1} / l_x) * (l_{x+2} / l_{x+1}) * \dots * (l_{x+n} / l_{x+n-1}) \\ &= p_x * p_{x+1} * \dots * p_{x+n-1} \end{aligned}$$

- Für die **Wahrscheinlichkeit eines x-jährigen Mannes in den nächsten n Jahren zu sterben** gilt:

$${}_n q_x = 1 - {}_n p_x$$

## III.3. Grundlagen der Theorie der Personengesamtheiten

### III.3.2. Ausscheideordnungen

---

- Für die **mittlere Lebenserwartung eines x-jährigen Mannes** gilt:

$$\begin{aligned}e_x &= ((l_x + l_{x+1} + \dots + l_\omega) / l_x) - 1/2 \\ &= f_x - 1/2\end{aligned}$$

- Der Korrekturterm  $-1/2$  wird eingeführt, da in der Realität nicht alle Ende des Jahres sterben
- Mit zunehmendem Alter steigt die erwartete Gesamtlebensdauer, da gilt:

$$x + e_x < x + 1 + e_{x+1}$$



## III.3. Grundlagen der Theorie der Personengesamtheiten

### III.3.2. Ausscheideordnungen

- Beweis:

Es genügt zu zeigen:  $f_x < 1 + f_{x+1}$

$$\begin{aligned} f_x &= ((l_x + l_{x+1} + \dots + l_\omega) / l_x) \\ &= 1 + ((l_{x+1} + \dots + l_\omega) / l_{x+1}) * (l_{x+1} / l_x) \\ &= 1 + f_{x+1} * p_x \\ &< 1 + f_{x+1} \end{aligned}$$

- Diese Daten  $l_x$ ,  $d_x$ ,  $p_x$ ,  $q_x$  und  $e_x$  werden in so genannten **Sterbetafeln** für die Alter  $x$  von  $\alpha$  bis  $\omega$  wiedergegeben

## III.3. Grundlagen der Theorie der Personengesamtheiten

### III.3.2. Ausscheideordnungen

---

- Man kann selbstverständlich auch **Personengesamtheiten** betrachten, die **zwei oder mehrere Attribute** haben und diese verlieren können
- Beispiel mit zwei Attributen:
  - Die Versicherten einer Pensionskasse können z.B. die Attribute "aktiv" und "leben" haben
  - Durch das Attribut "aktiv" erhält man die Hauptgesamtheit "Aktive" und die Nebengesamtheit "Invalide"
  - In beiden Personengesamtheiten kann man das Attribut "leben" beobachten

## III.3. Grundlagen der Theorie der Personengesamtheiten

### III.3.2. Ausscheideordnungen

---

- Falls man unterstellt, dass Aktive und Invalide unterschiedliche Sterbewahrscheinlichkeiten haben, liegt eine inhomogene Zerlegung vor
  - Es gibt Hinweise, dass die Wahrscheinlichkeit zu sterben von Invaliden kurz nach der Invalidisierung höher ist als die von Aktiven
  - Im Laufe der Jahre gleichen sich beide Sterbewahrscheinlichkeiten jedoch wieder an
- Falls man unterstellt, dass Aktive und Invalide gleiche Sterbewahrscheinlichkeiten haben, liegt eine homogene Zerlegung vor
- Personengesamtheiten mit mehreren Attributen werden hier nicht weiter betrachtet

## III.3. Grundlagen der Theorie der Personengesamtheiten

---

### Inhalt

1. Einleitung
2. Ausscheideordnungen
- 3. Erläuterungen zu Sterbetafeln**

## III.3. Grundlagen der Theorie der Personengesamtheiten

### III.3.3. Erläuterungen zu Sterbetafeln

Unter Bezug auf den KL-Tarif 95 werden im Folgenden einige Erläuterungen zu Sterbetafeln gegeben

- Da die Wahrscheinlichkeiten zu sterben für Männer grösser sind als für Frauen, wird zwischen **Sterbetafeln für Männer und für Frauen** unterschieden
  - $GK_M$  bzw.  $GK_F$
- Da die Risiken für eine Lebensversicherung oder Pensionskasse – in der Regel – für Kapitalversicherungen bzw. Rentenversicherungen unterschiedlich sind, wird zwischen **Kapitaltafeln und Rententafeln** unterschieden
  - $G_{KM}$  bzw.  $G_{RM}$

## III.3. Grundlagen der Theorie der Personengesamtheiten

### III.3.3. Erläuterungen zu Sterbetafeln

---

- Da in der Einzellebensversicherung
  - sowohl die Antiselektionsmöglichkeiten der Versicherten
  - als auch die Underwritingmassnahmen der Lebens-VUgrösser sind als in der Kollektivlebensversicherung, wird zwischen **Sterbetafeln für die Kollektivversicherung (Gruppenversicherung) und Einzelversicherung** unterschieden  
*GKM* bzw. *EKM*

## III.3. Grundlagen der Theorie der Personengesamtheiten

### III.3.3. Erläuterungen zu Sterbetafeln

---

Folgende Relationen gelten:

- **Risiken Männer bzw. Frauen:**

- Wegen der unterschiedlichen Sterbewahrscheinlichkeiten gilt:

$$q_x(\text{GKM}) > q_y(\text{GKF}) \quad \text{und} \quad q_x(\text{GRM}) > q_y(\text{GRF})$$

- Für **Unisex-Tarife** folgt daraus, dass
  - Kapitalversicherungen für Frauen teurer und für Männer billiger werden und dass
  - Rentenversicherungen für Männer teurer und für Frauen billiger werden

## III.3. Grundlagen der Theorie der Personengesamtheiten

### III.3.3. Erläuterungen zu Sterbetafeln

---

- **Risiken Tod bzw. Erleben:**
  - Falls **Versicherungsleistungen bei Tod** fällig werden, werden **Kapitaltafeln** benutzt
    - Beispiel: Todesfallkapitalversicherung
  - Falls **Versicherungsleistungen bei Erleben** fällig werden, werden **in der Regel Rententafeln** benutzt
    - Beispiel: laufende Leibrente
  - $q_x(\text{GKM}) > q_x(\text{GRM})$  und  $q_y(\text{GKF}) > q_y(\text{GRF})$
  - Man beachte allerdings, dass bei einer Gemischten mit Kapitaltafeln tarifiert wird, da die Erlebensfallleistung angespart wird



## III.3. Grundlagen der Theorie der Personengesamtheiten

### III.3.3. Erläuterungen zu Sterbetafeln

---

- **Risiken Underwriting und Antiselektion:**
  - Wegen der strengeren Underwritingmassnahmen der Lebens-VU und der grösseren Selektionsmöglichkeiten der Versicherten gilt:

$$q_x(\text{GKM}) > q_x(\text{EKM}) \text{ und } q_x(\text{GRM}) > q_x(\text{ERM})$$

$$q_y(\text{GKM}) > q_y(\text{EKM}) \text{ und } q_y(\text{GRM}) > q_y(\text{ERM})$$

## III.3. Grundlagen der Theorie der Personengesamtheiten

### III.3.3. Erläuterungen zu Sterbetafeln

- **Risiken in Abhängigkeit der Ursachen:**
  - In der Kollektivlebensversicherung werden bis zum Alter 65 unterschieden:
    - die Wahrscheinlichkeit zu sterben aufgrund von Krankheit:  $q_x^K$
    - die Wahrscheinlichkeit zu sterben aufgrund von Unfall  $q_x^U$
    - die totale Wahrscheinlichkeit zu sterben als Summe der beiden obigen Wahrscheinlichkeiten  $q_x = q_x^K + q_x^U$
  - Abgesehen von den ersten paar Jahren ist die Wahrscheinlichkeit an Krankheit zu sterben grösser als die Wahrscheinlichkeit an Unfall zu sterben
  - Diese Unterscheidung ist erforderlich, da im BVG-Geschäft wegen der obligatorischen Unfallversicherung Unfall als Ursache ausgeschlossen werden kann

## III.3. Grundlagen der Theorie der Personengesamtheiten

### III.3.3. Erläuterungen zu Sterbetafeln

---

- **Kommutationszahlen** wurden eingeführt und in Tabellen zur Verfügung gestellt, um die Darstellungen und Berechnungen zu vereinfachen
- Weiter unten werden sie definiert und benutzt
- Es gilt z.B.
  - $D_x = I_x * v^x$  für die "diskontierten Lebenden"
  - $C_x = I_x * v^{x+1}$  für die "diskontierten Toten"