

III. Grundlagen der Lebensversicherungsmathematik

III.2. Grundlagen der Zinsrechnung

Universität Basel
Herbstsemester 2015

Dr. Ruprecht Witzel
ruprecht.witzel@aktuariat-witzel.ch
www.aktuariat-witzel.ch

III.2. Grundlagen der Zinsrechnung

Inhalt

- 1. Einmalige Zahlungen**
2. Periodische Zahlungen
3. "Sparversicherungen"

III.2. Grundlagen der Zinsrechnung

III.2.1. Einmalige Zahlungen

Zur Vereinfachung der Darstellungen wird auf unterjährige Zahlungen und unterjährige Verzinsungen verzichtet

Folgende **Bezeichnungen** sind üblich:

- P Barwert oder Anfangswert eines Kapitals
- S Endwert eines Kapitals
- i Zinssatz für ein Jahr
- $r = 1 + i$ Aufzinsungsfaktor
- $v = 1/(1 + i)$ Abzinsungsfaktor oder Diskontierungsfaktor
- $d = 1 - v = i/(1 + i)$ Diskontrate
- n Anzahl Jahre

III.2. Grundlagen der Zinsrechnung

III.2.1. Einmalige Zahlungen

- **Endwert des Kapitals** P , das n Jahre am Zinssatz i liegt:
$$S = P * (1 + i)^n = P * r^n$$
 - Es liegt ein Zinseszinsprozess vor, d.h. die Zinszahlungen werden wieder angelegt und mit dem Zinssatz i verzinst
- **Barwert des Kapitals** S , das nach n Jahren bei dem Zinssatz i fällig wird:
$$P = S / (1 + i)^n = S * v^n$$
 - Es liegt eine Diskontierung mit $(1 + i)^n$ für n Jahre vor

III.2. Grundlagen der Zinsrechnung

Inhalt

1. Einmalige Zahlungen
- 2. Periodische Zahlungen**
3. "Sparversicherungen"

III.2. Grundlagen der Zinsrechnung

III.2.2. Periodische Zahlungen

- Unter einer **Zeitrente der Dauer von n Jahren** versteht man n periodische Zahlungen vom gleichen Betrag nach Ablauf von jeweils einer Periode
- Man unterscheidet **vorschüssige** und **nachschüssige** Zahlungsweisen
 - Bei **vorschüssiger Zahlungsweise** erfolgen die Zahlungen am Anfang der Periode
 - Bei vorschüssiger Zahlungsweise erfolgt somit die erste Zahlung zu Beginn der ersten Periode und nicht nach Ablauf einer Periode
 - Bei **nachschüssiger Zahlungsweise** erfolgen die Zahlungen am Ende der Periode

III.2. Grundlagen der Zinsrechnung

III.2.2. Periodische Zahlungen

Für eine Zeitrente vom Betrag 1 sind folgende Bezeichnungen üblich:

- $s_{\bar{n}}$ **Endwert** einer ganzjährigen n-mal **nachschüssig** bezahlten Rente vom Betrag 1
- $a_{\bar{n}}$ **Barwert** einer ganzjährigen n-mal **nachschüssig** bezahlten Rente vom Betrag 1
- $\ddot{a}_{\bar{n}}$ **Barwert** einer ganzjährigen n-mal **vorschüssig** bezahlten Rente vom Betrag 1
- Aufgrund der Definitionen gilt folgende Beziehung zwischen vorschüssigen und nachschüssigen Zeitrenten:

$$\ddot{a}_{\bar{n}} = 1 + a_{\overline{n-1}}$$

III.2. Grundlagen der Zinsrechnung

III.2.2. Periodische Zahlungen

- **Barwert** von einer um m Jahre **aufgeschobenen Zeitrente** mit einer Dauer von n Jahren bei **nachschüssiger** Zahlungsweise:

$${}_m a_{\bar{n}} = v^m * a_{\bar{n}}$$

- **Barwert** von einer um m Jahre **aufgeschobenen Zeitrente** mit einer Dauer von n Jahren bei **vorschüssiger** Zahlungsweise:

$${}_m \ddot{a}_{\bar{n}} = v^m * \ddot{a}_{\bar{n}}$$

III.2. Grundlagen der Zinsrechnung

III.2.2. Periodische Zahlungen

- **Endwert** einer **nachschüssigen Zeitrente** vom Betrag 1 und der Dauer n :

$$\begin{aligned} s_{\bar{n}} &= 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1} \\ &= \frac{r^n - 1}{i} \end{aligned}$$

- Hierbei gibt 1 die letzte und r^{n-1} die erste Zahlung wieder

- **Barwert** einer **nachschüssigen Zeitrente** vom Betrag 1 und der Dauer n :

$$\begin{aligned} a_{\bar{n}} &= v^n * s_{\bar{n}} = v^n * \frac{r^n - 1}{i} \\ &= \frac{1 - v^n}{i} \end{aligned}$$

- Für $n \rightarrow \infty$ folgt wegen $v^n \rightarrow 0$: $a_{\bar{n}} \rightarrow \frac{1}{i}$

III.2. Grundlagen der Zinsrechnung

III.2.2. Periodische Zahlungen

- **Barwert** einer **vorschüssigen Zeitrente** vom Betrag 1 und der Dauer n :

$$\ddot{a}_n = 1 + v + v^2 + \dots + v^{n-1}$$

$$= \frac{v^n - 1}{v - 1}$$

- Hierbei gibt 1 die erste und v^{n-1} die letzte Zahlung wieder

III.2. Grundlagen der Zinsrechnung

Inhalt

1. Einmalige Zahlungen
2. Periodische Zahlungen
3. **"Sparversicherungen"**

III.2. Grundlagen der Zinsrechnung

III.2.3. "Sparversicherungen"

- **"Kapitalversicherung"**, bei der der Betrag K nach n Jahren ausbezahlt wird:
 - **Einmalprämie:** $EP = K * v^n$
 - **Jahresprämien:** $JP = \frac{EP}{\ddot{a}_{\bar{n}}} = \frac{K * v^n}{\ddot{a}_{\bar{n}}}$
- Hierbei werden die Jahresprämien während der n Jahre bezahlt

III.2. Grundlagen der Zinsrechnung

III.2.3. "Sparversicherungen"

- **"Rentenversicherung"**, die um m Jahre aufgeschoben ist und bei der die vorschüssige Zeitrente vom Betrag R während n Jahren bezahlt wird:
 - **Einmalprämie:** $EP = R * {}_m\ddot{a}_{\bar{n}}$
 - **Jahresprämien:** $JP = \frac{EP}{\ddot{a}_{\bar{m}}} = \frac{R * {}_m\ddot{a}_{\bar{n}}}{\ddot{a}_{\bar{m}}}$
- Hierbei werden die Jahresprämien während der Aufschubszeit von m Jahren bezahlt

III.2. Grundlagen der Zinsrechnung

III.2.3. "Sparversicherungen"

- Bei solchen "Sparversicherungen" spielt nur der Zinssatz eine Rolle
 - Biometrische Risiken wie z.B. die Sterblichkeit werden nicht berücksichtigt
- Wegen des Fehlens von biometrischen Risiken werden in der Schweiz "Sparversicherungen" nicht als Versicherungen anerkannt